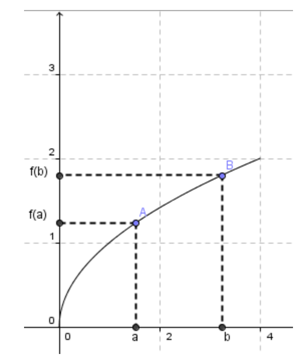
Sens de Variations

Plan

- Fonction strictement croissante
- Fonction strictement décroissante
- Exemple 1 : fonction affine
- Exemple 2 : fonction du second degré
- Exemple 3 : fonction homographique

Fonction strictement croissante



f est strictement croissante sur $\mathbb{I}$ = [0 ; 4]

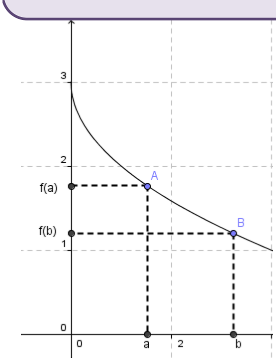
f est strictement croissante sur $\mathbb{I}$ si :

- **pour tous a et b dans $\mathbb{I}$,**
- **a < b $\Rightarrow$ f(a) < f(b)**

<u>En pratique :</u>

- On calcule f(b) – f(a)
- **On montre que f(b)-f(a) > 0 (positif)**

Fonction strictement décroissante



f est strictement décroissante sur $\mathbb{I}$ = [0 ; 4]

f est strictement décroissante sur $\mathbb{I}$ si :

- **pour tous a et b dans $\mathbb{I}$,**
- **a < b $\Rightarrow$ f(a) > f(b)**

<u>En pratique :</u>

- On calcule f(b) – f(a)
- **On montre que f(b)-f(a) < 0 (négatif)**

Exemple 1 : fonction affine

$f(x) = -2x + 4$ $\qquad D_f = \mathfrak{R}$

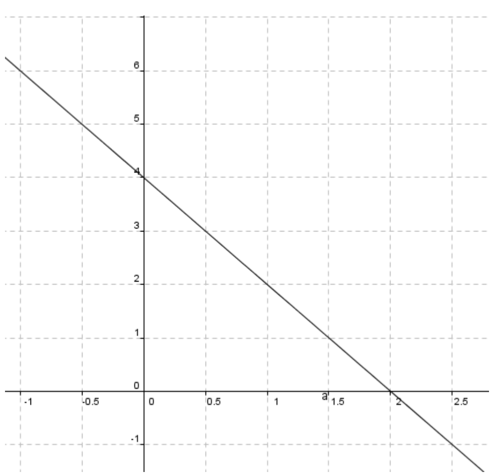
$$
\begin{aligned}
f(b) - f(a) &= (-2b + 4) - (-2a + 4) \\
&= -2b + 4 + 2a - 4 \\
&= -2b + 2a \\
&= 2(-b + a) \\
&= 2(a - b)
\end{aligned}
$$

	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
a – b	-
f(b) – f(a)	-

f est donc strictement décroissante sur $\mathfrak{R}$

Exemple 1 : fonction affine

$f(x) = -2x + 4$ $\qquad D_f = \mathfrak{R}$



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f	$+\infty$ $\qquad$ $-\infty$

Exemple 2 : fonction du second degré

$g(x) = x^2 + 4x - 5$ $\quad D_g = \Re$

Montrer que g est strictement croissante sur [-2; +∞[

$$g(b) - g(a) = (b^2 + 4b - 5) - (a^2 + 4a - 5)$$

$$= b^2 + 4b \cancel{-5} - a^2 - 4a \cancel{+5}$$

$$= b^2 - a^2 + 4(b - a)$$

$$= (b-a)(b+a) + 4(b-a)$$

$$= (b-a)[(b+a) + 4]$$

$$= (b-a)[b+a+4]$$

Exemple 2 : fonction du second degré

$g(x) = x^2 + 4x - 5$ $\quad D_g = \Re$

Montrer que g est strictement croissante sur [-2; +∞[

$$g(b) - g(a) = (b-a)[b+a+4]$$

Or $-2 \leq a < b$

$-4 < a+b$

$0 < a + b + 4$

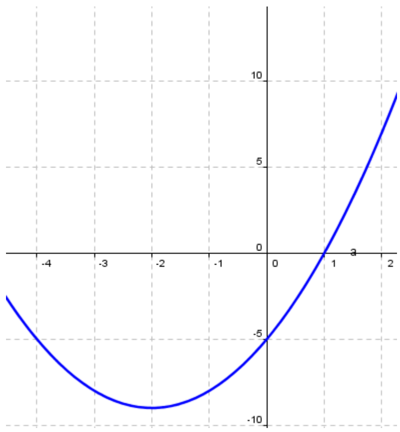
	-2 +∞
b – a	+
b+a +4	+
g(b) – g(a)	+

g est donc strictement croissante sur $\mathbb{I}$ = [-2 ; +∞[

Exemple 2 : fonction du second degré

g(x)= x^2 + 4 x - 5 D$_g$ = $\Re$

Montrer que g est strictement croissante sur [-2; +∞[



x	-2	+∞
g	-9 ↗	+∞

Exemple 3 : fonction homographique

h(x)= $\dfrac{2x+1}{x-1}$ D$_h$ = $\Re \setminus \{1\}$

$$h(b) - h(a) = \frac{2b+1}{b-1} - \frac{2a+1}{a-1}$$

$$= \frac{(2b+1)(a-1)}{(b-1)(a-1)} - \frac{(2a+1)(b-1)}{(a-1)(b-1)}$$

$$= \frac{[2ba-2b+a-1]-[2ab-2a+b-1]}{(b-1)(a-1)}$$

$$= \frac{\cancel{2ba}-2b+a\cancel{-1}\cancel{-2ab}+2a-b\cancel{+1}}{(b-1)(a-1)}$$

$$= \frac{-2b+a+2a-b}{(b-1)(a-1)} = \frac{-3b+3a}{(b-1)(a-1)} = \frac{3(a-b)}{(b-1)(a-1)}$$

Exemple 3 : fonction homographique

h(x)= $\frac{2x+1}{x-1}$ $D_h = \Re \setminus \{1\}$

h(b) – h(a) = $\frac{3(a-b)}{(b-1)(a-1)}$

$\begin{cases} a < b \\ a-b < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a-1 \geq 0 \\ a \geq 1 \end{cases}$

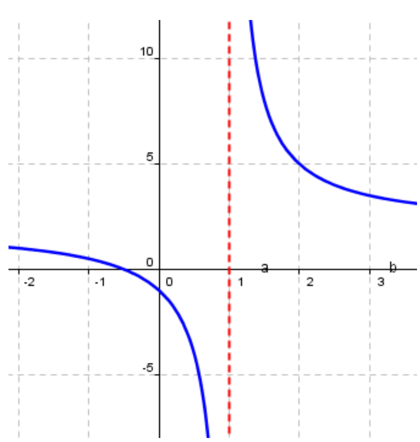
$\begin{cases} b-1 \geq 0 \\ b \geq 1 \end{cases}$

	-∞	1	+∞
a –b	-		-
b-1	-	0	+
a-1	-	0	+
h(b)-h(a)	-	‖	-

h est donc strictement décroissante sur $\Re \setminus \{1\}$

Exemple 3 : fonction homographique

h(x)= $\frac{2x+1}{x-1}$ $D_h = \Re \setminus \{1\}$



x	-∞	1	+∞
h	2 ↘ -∞	‖	+∞ ↘ 2