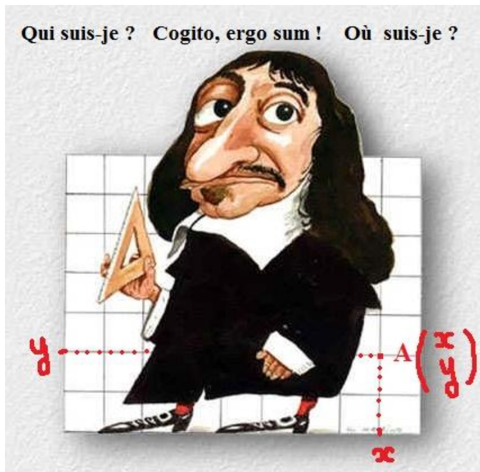
Géométrie Cartésienne



Plan

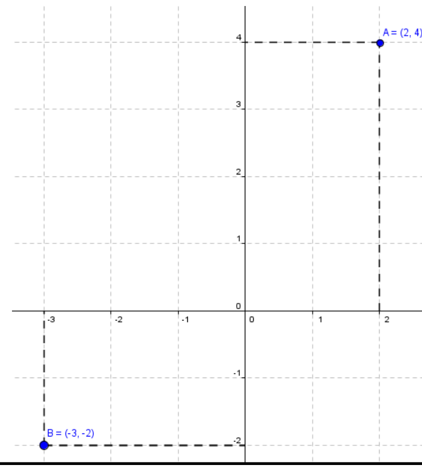
- I) Coordonnées d'un point
- II) Milieu d'un segment [AB] et recettes de cuisine
  Recette 1 : calculer les **coordonnées du milieu**
  Recette 2 : calculer les coordonnées d'un symétrique
  Recette 3: montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme …
  Recette 4 : calculer les coordonnées du 4ème point d'un parallélogramme
- III) Calculs de distances et recettes de cuisine
  Recette 5 : Calculer **la distance AB**
  Recette 6 : Monter qu'un triangle est rectangle …
  Recette 7 : Montrer qu'un triangle est isocèle ou équilatéral…
  Recette 8: Montrer qu'un quadrilatère est un losange …
  Recette 9 : Montrer qu'un quadrilatère est un rectangle …

I) coordonnées d'un point

Pour placer le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on place x sur l'axe horizontal et y sur l'axe vertical.

Le point M se trouve à l'intersection des pointillés. C'est comme à la bataille navale ! Coulé!

$$Exemple: \ A\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad et \quad B\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$



II) Milieu d 'un segment [AB] et Recettes de cuisine
Recette 1 : calculer les coordonnées du milieu

- **Les coordonnées de I =mil[AB] sont :**

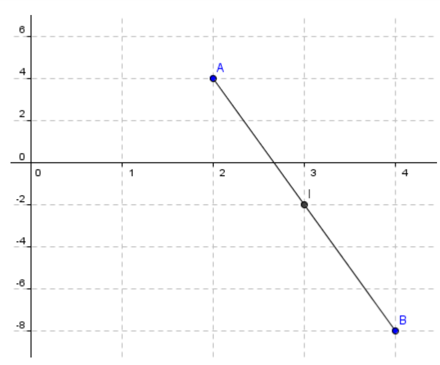
$$I\begin{pmatrix} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$$

Connaitre par cœur !

Retenir: coord du milieu = moyenne des coord

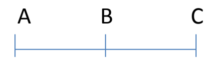
$$Exemple: \ A\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad et \quad B\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$I = mil[AB] \Rightarrow I\begin{pmatrix} x_I = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ y_I = \dfrac{4+(-8)}{2} = -2 \end{pmatrix}$$



Recette 2 : calculer les coordonnées du symétrique

- **C est symétrique de A par rapport au point B $\Leftrightarrow$ B = mil [AC]**

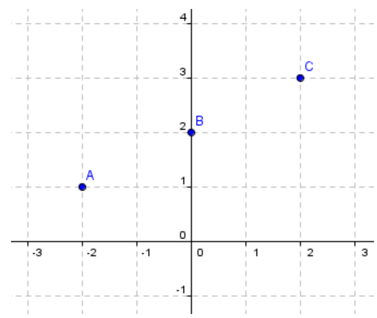


$$Exemple : \; A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad et \quad B\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$B = mil[AC] \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2+x_C}{2} = 0 \\ \dfrac{1+y_C}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2+x_C = 0 \\ 1+y_C = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 3 \end{cases}$$

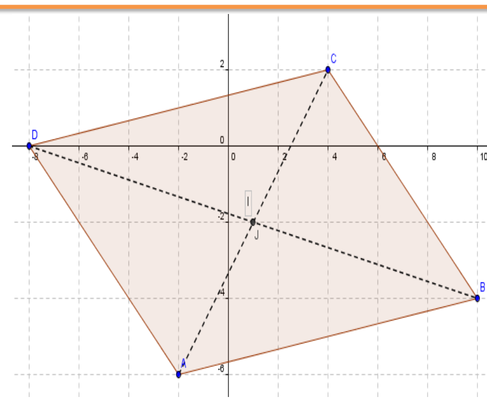


Recette 3 : montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

__Principe :__ Dans un parallélogramme , **les diagonales ont même milieu**

$$Exemple : \; A\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}$$

$$C\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \quad D\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$$



$$Soit \; I = mil[AC] \; et \; J = mil[BD]$$

$$alors \quad I\begin{pmatrix}\dfrac{-2+4}{2}\\ \dfrac{-6+2}{2}\end{pmatrix} = I\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$et \quad J\begin{pmatrix}\dfrac{10+(-8)}{2}\\ \dfrac{-4+0}{2}\end{pmatrix} = J\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

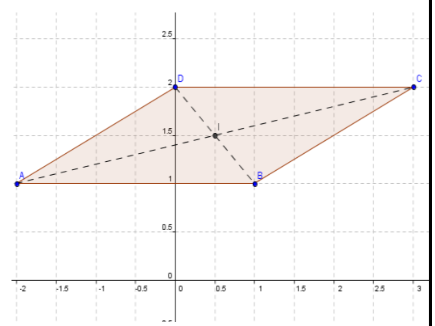
donc $I = J$ *les diagonales ont même milieu ce qui prouve que ABCD est un parallélogramme*

Recette 4 : Calculer les coordonnées du 4ème point d'un parallélogramme

<u>Principe :</u>Dans un parallélogramme , **les diagonales ont même milieu**

$$Exemple : A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$C\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad D\begin{pmatrix}x_D\\y_D\end{pmatrix}$$



$$Soit\ I = mil[AC]\ et\ J = mil[BD]$$

$$alors \quad I\begin{pmatrix}\frac{-2+3}{2}\\\frac{1+2}{2}\end{pmatrix} = I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} \qquad et \quad J\begin{pmatrix}\frac{1+x_D}{2}\\\frac{1+y_D}{2}\end{pmatrix}$$

$$or\ ABCD\ parallélog \Leftrightarrow I = J \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2} = \frac{1+x_D}{2}\\\frac{3}{2} = \frac{1+y_D}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 = 1+x_D\\3 = 1+y_D\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D = 0\\y_D = 2\end{cases}$$

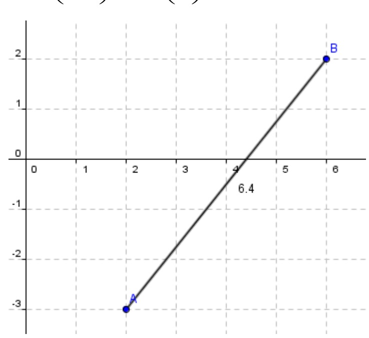
III) Calcul de distances et recettes de cuisine
Recette 5 : Calculer la distance AB

<u>Principe :</u> On se place dans un repère orthonormé et on utilise Pythagore … encore lui …

$$A\begin{pmatrix}x_A\\y_B\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$A\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow AB = \sqrt{(6-2)^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

$$AB \approx 6{,}4\ à\ 0{,}1\ près$$



Recette 6 : Montrer qu'un quadrilatère est un losange

<u>Principe :</u>
a) Montrer que ses **4 cotés ont même longueur**
b) Ou monter que ses diagonales ont **même milieu** et 2 cotés consécutifs de même longueur

$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \quad D\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

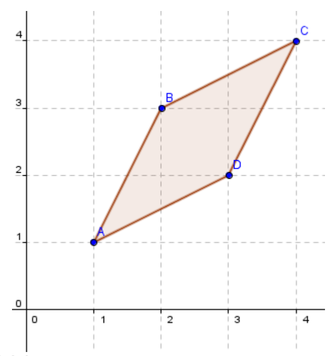
$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$BC=\sqrt{(4-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$$

$$CD=\sqrt{(3-4)^2+(2-4)^2}=\sqrt{5}$$

$$DA=\sqrt{(1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$$

$$AB=BC=CD=DA \Rightarrow ABCD \ \text{ est un losange}$$



Recette 7 : Montrer qu'un quadrilatère est un rectangle

<u>Principe :</u> Montrer que ses **diagonales** ont **même milieu et même longueur**

$A\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad D\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

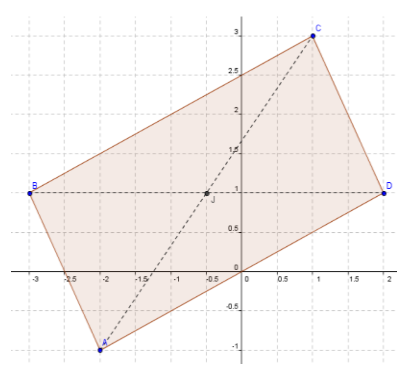
$$DB=\sqrt{(-3-2)^2+(1-1)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$AC=\sqrt{(1-(-2))^2+(3-(-1))^2}=\sqrt{25}=5$$

$$Soit \ I=mil[BD] \ et \ J=mil[AC]$$

$$alors \quad I\begin{pmatrix}\frac{-3+2}{2}\\ \frac{1+1}{2}\end{pmatrix}=I\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\1\end{pmatrix} \quad et \quad J\begin{pmatrix}\frac{-2+1}{2}\\ \frac{-1+3}{2}\end{pmatrix}=I\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$donc \ I=J$$



ABCD est donc un parallélogramme